

Cours de mathématiques M.P.S.I.

D'après les cours de M. De Granrut

Henriet Quentin
Ausseil Lucas
Perard Arsène
Philipp Maxime

Espaces vectoriels de dimension finie

I. Famille de vecteurs

I.1. Définition

Définition :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$

On dit que :

1. $\mathcal{F}$ est libre ou que les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont linéairement indépendants si :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}_E \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

2. $\mathcal{F}$ est liée si elle n'est pas libre :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}_E \text{ et } (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0) \text{ c'est-à-dire } \exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } \lambda_{i_0} \neq 0$$

3. $\mathcal{F}$ est génératrice si $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$, c'est-à-dire $\forall \vec{x} \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i$

4. $\mathcal{F}$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

I.2. Familles libres – Familles liées

Remarques :

- Une famille qui ne comporte qu'un vecteur est libre si et seulement si le vecteur est non nul.
- Une famille qui contient le vecteur nul est liée.
- Deux vecteurs non colinéaires forment une famille libre.
- Toute sur-famille d'une famille liée est liée.
- Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

Proposition :

Si on ajoute à une famille libre un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des autres, on obtient une famille libre.

Preuve :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre, $\vec{x}_{n+1} \notin \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}, \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i \vec{x}_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{x}_i + \lambda_{n+1} \vec{x}_{n+1} = 0$$

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$, $\vec{x}_{n+1} = -\sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+1}} \vec{x}_i \in \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ contredit l'hypothèse, donc $\lambda_{n+1} = 0$

Il reste $\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i = 0$ Or $\mathcal{F}$ est libre donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ Donc $\mathcal{F}$ est libre.

Proposition :

Soit $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \Leftrightarrow \left(\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{x}_i = \sum_{i=0}^n \mu_i \vec{x}_i \Rightarrow \forall i, \lambda_i = \mu_i \right)$$

Preuve :

$$\Leftarrow : \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0} = \sum_{i=0}^n 0 \vec{x}_i \Rightarrow \forall i, \lambda_i = \mu_i = 0 : \mathcal{F} \text{ est libre.}$$

$$\Rightarrow : \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$$

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i \vec{x}_i = \sum_{i=0}^n \mu_i \vec{x}_i \Rightarrow \sum_{i=0}^n (\lambda_i - \mu_i) \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow \forall i, \lambda_i - \mu_i = 0$$

Proposition :

Une famille est liée si et seulement si l'un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Preuve :

$$\Leftarrow : \vec{x}_1 = \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n \Leftrightarrow -1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0} \quad \text{Donc la famille est liée.}$$

$$\Rightarrow : \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus (0, \dots, 0) \text{ tel que } \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n = \vec{0}$$

$$\exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ tel que } \lambda_{i_0} \neq 0$$

$$\vec{x}_{i_0} = \frac{-\lambda_1}{\lambda_{i_0}} \vec{x}_1 + \dots + \frac{-\lambda_n}{\lambda_{i_0}} \vec{x}_n$$

1.3. Famille génératrices

Remarque :

Une sur-famille d'une famille génératrice est génératrice.

Proposition :

Soient $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille de n vecteurs de E , $\vec{x}_{n+1} \in E$

On suppose que $\mathcal{F} \cup \{\vec{x}_{n+1}\}$ est génératrice.

$\mathcal{F}$ est génératrice $\Leftrightarrow \vec{x}_{n+1} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Preuve :

$$\Rightarrow : \mathcal{F} \text{ génératrice} \Leftrightarrow \text{Vect}(\mathcal{F}) = E, \text{ donc } \vec{x}_{n+1} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$$

$$\Leftarrow : \forall \vec{x} \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \mathcal{F} \cup \{\vec{x}_{n+1}\} \text{ génératrice : } \vec{x} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n + \lambda_{n+1} \vec{x}_{n+1}$$

$$\text{Or } \vec{x}_{n+1} \in \text{Vect}(\mathcal{F}) \text{ donc } \exists (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \vec{x}_{n+1} = \mu_1 \vec{x}_1 + \dots + \mu_n \vec{x}_n$$

$$\text{Donc } \vec{x} = \sum_{i=1}^n (\lambda_i + \mu_i \lambda_{n+1}) \vec{x}_i \text{ donc } \mathcal{F} \text{ est génératrice.}$$

1.4. Bases

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \in E^n$

$\mathcal{B}$ est une base de $E \Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$.

Preuve :

$$\Rightarrow : \text{Existence : car } \mathcal{B} \text{ génératrice. Unicité : car } \mathcal{B} \text{ libre (proposition du 1.2.).}$$

$$\Leftarrow : \mathcal{B} \text{ génératrice car } (\exists!) \Rightarrow (\exists). \mathcal{B} \text{ libre avec proposition du 1.2.}$$

Définition :

L'unique n -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ s'appelle les coordonnées ou composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque :

Bases canoniques :

Dans $\mathbb{R}^2$: $((1, 0); (0, 1))$

Dans $\mathbb{R}^3$: $((1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1))$

Dans $\mathbb{K}^n$: $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ avec $\vec{e}_i = (0, \dots, \underset{i\text{ème}}{1}, \dots, 0)$

Dans $\mathbb{K}_n[X]$: $(1, X, X^2, \dots, X^n)$

$$\text{Dans } \mathcal{M}_2[\mathbb{R}] : \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{11}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{12}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=E_{21}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=E_{22}} \right)$$

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, $\mathcal{B}=(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \in E^n$

$$\mathbb{K}^n \rightarrow E$$

$$\varphi : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$$

Alors :

1. φ est linéaire
2. φ est injective $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ est libre
3. φ est surjective $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ est génératrice
4. φ est bijective $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ est une base.

Preuve :

1. $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n, \forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + (\mu_1, \dots, \mu_n)) &= \varphi((\alpha\lambda_1 + \mu_1, \dots, \alpha\lambda_n + \mu_n)) = \sum_{i=1}^n (\alpha\lambda_i + \mu_i) \vec{e}_i = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{e}_i \\ &= \alpha \varphi((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) + \varphi((\mu_1, \dots, \mu_n)) \end{aligned}$$

2. $\Rightarrow : \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0} \Rightarrow \varphi((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \vec{0} \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \text{Ker}(\varphi) = \{\vec{0}_{\mathbb{K}^n}\} \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$$

Donc $\mathcal{B}$ est libre.

- $\Leftarrow : \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\varphi((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \vec{0}_E \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E \stackrel{\text{libre}}{\Rightarrow} \forall i, \lambda_i = 0 \Rightarrow (\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$$

Donc $\text{Ker } \varphi = \{\vec{0}_{\mathbb{K}^n}\}$, donc φ injective.

3. $\Rightarrow : \forall \vec{x} \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$ Donc $\mathcal{B}$ est génératrice.

$$\Leftarrow : \forall \vec{x} \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \varphi((\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \vec{x} \text{ Donc } \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \vec{x} \text{ Donc } \varphi \text{ est surjective.}$$

4. 4. $\Leftrightarrow$ 3. et 2.

Proposition :

Soit $\mathcal{B}=(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la $i^{\text{ème}}$ application coordonnées :

$$p_i : \begin{array}{l} E \rightarrow \mathbb{K} \\ \vec{x} \mapsto \lambda_i \end{array} \text{ avec } \vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$$

est une forme linéaire.

Preuve :

– $p_i : E \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow$ forme.

$$\begin{aligned} - \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i \\ \exists! (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \vec{y} = \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{e}_i \end{aligned}$$

$$p_i(\vec{x}) = \lambda_i \quad p_i(\vec{y}) = \mu_i$$

$$\alpha \vec{x} + \vec{y} = \alpha \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i + \sum_{i=1}^n \mu_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^n (\alpha \lambda_i + \mu_i) \vec{e}_i$$

Par unicité des coordonnées dans une base, $p_i(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = \alpha \lambda_i + \mu_i = \alpha p_i(\vec{x}) + p_i(\vec{y}) \rightarrow$ linéaire.

1.5. Construction d'applications linéaires

Théorème :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev.

$\mathcal{B}=(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

$\mathcal{F}=(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille de vecteurs de F .

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i, u(\vec{e}_i)=\vec{x}_i$.

Preuve :

Analyse : Supposons qu'une telle application linéaire existe.

$$\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$$

$$u(\vec{x}) = u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i\right) \stackrel{u \text{ linéaire}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i \rightarrow \text{Unicité.}$$

Synthèse : $\forall \vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$, on pose $u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i$

$$u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n p_i(\vec{x}) \vec{x}_i \quad \text{Or } p_i \text{ linéaire donc } u \text{ est linéaire.}$$

$$u(\vec{e}_i) = u(0\vec{e}_1 + \dots + 1\vec{e}_i + \dots + 0\vec{e}_n) = 0\vec{x}_1 + \dots + 1\vec{x}_i + \dots + 0\vec{x}_n = \vec{x}_i \rightarrow \text{Existence.}$$

Proposition :

Avec les notations du théorème :

u est injective $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ est libre

u est surjective $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ est génératrice

u est bijective $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ est une base.

Preuve :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \mathcal{B}=(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) & \mapsto & (u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))=\mathcal{F} \\ & \searrow \varphi & \nearrow v \\ & \mathbb{K}^n & \\ & (\lambda_1, \dots, \lambda_n) & \end{array}$$

$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\vec{e}_i)$

φ est un isomorphisme car $\mathcal{B}$ est une base. $u = v \circ \varphi^{-1} \Leftrightarrow v = u \circ \varphi$

$$\begin{cases} u \text{ injective} \Rightarrow u \circ \varphi \text{ injective} \Rightarrow v \text{ injective} \\ v \text{ injective} \Rightarrow v \circ \varphi^{-1} \text{ injective} \Rightarrow u \text{ injective} \end{cases} \Rightarrow u \text{ injective} \Leftrightarrow v \text{ injective} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ libre. (proposition du 1.4.)}$$

Les équivalences suivantes se prouvent de la même façon.

Corollaire :

Une application linéaire est bijective (isomorphisme) si et seulement si elle transforme une base en une base.

2. Dimension finie

Définition :

Un $\mathbb{K}$ -ev est dit de dimension finie s'il contient une famille génératrice de cardinal fini.

2.1. Théorème de la base incomplète

Théorème :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E , et $\mathcal{L}$ une famille libre telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$.
Il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$.

Corollaire :

Dans un espace vectoriel de dimension finie :
– Toute famille libre se complète en une base.
– De toute famille génératrice on peut extraire une base.

Preuve du corollaire :

- E est de dimension finie donc E contient une famille génératrice finie $\mathcal{F}$, et $\mathcal{L}$ est libre
On applique le théorème à $(\mathcal{L}, \mathcal{F} \cup \mathcal{L})$
- $\mathcal{G}$ est génératrice, on applique le théorème à $(\emptyset, \mathcal{G})$

Preuve du théorème :

Il n'y a qu'un nombre fini de familles $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{L} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ et $\mathcal{F}$ libre.

Et il y en a une au moins qui a un nombre maximal d'éléments : $\mathcal{B}$

- $\mathcal{B}$ est libre par construction.
 - $\forall \vec{x} \in \mathcal{G}$:
 - 1^{er} cas : $\vec{x} \in \mathcal{B}$ donc $\vec{x} \in \text{Vect}(\mathcal{B})$
 - 2^{ème} cas : $\vec{x} \notin \mathcal{B}$ alors $\mathcal{B} \cup \{\vec{x}\}$ est de cardinal $\text{Card}(\mathcal{B}) + 1$
Donc $\mathcal{B} \cup \{\vec{x}\}$ est liée, donc $\vec{x} \in \text{Vect}(\mathcal{B})$ (sinon $\mathcal{B} \cup \{\vec{x}\}$ libre)
Donc $\mathcal{G} \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$ Donc $E = \text{Vect}(\mathcal{G}) \subset \text{Vect}(\mathcal{B}) \subset E$ Donc $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$
Donc $\mathcal{B}$ est génératrice.
- Donc $\mathcal{B}$ est une base.

2.2. Dimension d'un espace vectoriel

Lemme technique :

Dans un $\mathbb{K}$ -ev engendré par n vecteurs, toute famille libre a moins ($\leq$) de n vecteurs.
Soient $\mathcal{G}$ génératrice de cardinal n , $\mathcal{L}$ libre de cardinal p : Alors $p \leq n$.

Corollaire :

Si $p > n$, alors $\mathcal{L}$ est liée.

Proposition :

Dans un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.

Définition :

Ce cardinal s'appelle la dimension de E . On le note $\dim(E)$.

Preuve de la proposition :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E .

$\mathcal{B}$ libre et $\mathcal{B}'$ génératrice $\Rightarrow \text{Card}(\mathcal{B}) \leq \text{Card}(\mathcal{B}')$

$\mathcal{B}$ génératrice et $\mathcal{B}'$ libre $\Rightarrow \text{Card}(\mathcal{B}') \leq \text{Card}(\mathcal{B})$

Donc $\text{Card}(\mathcal{B}') = \text{Card}(\mathcal{B})$.

Preuve du lemme technique :

Récurrence sur n :

- Pour $n=1$: $E = \text{Vect}(\vec{a})$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ Par contraposition : $p > n \Rightarrow \mathcal{F}$ liée.
 $\mathcal{F}$ contient au moins deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$. $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{x} = \alpha \vec{a}$ et $\vec{y} = \beta \vec{a}$.
 – Si $\alpha=0$ ou $\beta=0$: alors $\vec{x}=\vec{0}$ ou $\vec{y}=\vec{0}$ donc $(\vec{x}, \vec{y})$ est liée donc $\mathcal{F}$ est liée.
 – Sinon $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$: $\beta \vec{x} - \alpha \vec{y} = \vec{0}$ donc $(\vec{x}, \vec{y})$ est liée donc $\mathcal{F}$ est liée.

- Supposons $n \in \mathbb{N}^*$ et le résultat vrai au rang n
 $E = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{e}_{n+1})$ $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E^p$ libre.

$\exists (\lambda_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n+1 \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathbb{K}^{(n+1)p}$ tels que :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \lambda_{1,1} \cdot \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{n+1,1} \cdot \vec{e}_{n+1} \\ &\vdots \\ \vec{x}_j &= \lambda_{1,j} \cdot \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{n+1,j} \cdot \vec{e}_{n+1} \\ &\vdots \\ \vec{x}_p &= \lambda_{1,p} \cdot \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{n+1,p} \cdot \vec{e}_{n+1} \end{aligned}$$

1^{er} cas : $\forall j \in [1, p] \lambda_{1,j} = 0$: $\vec{x}_j \in \text{Vect}(\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n+1})$ $\mathcal{F}$ libre $\xrightarrow{\text{H.R.}} p \leq n \leq n+1$

2^{ème} cas : $\exists j$ tel que $\lambda_{1,j} \neq 0$. En échangeant les vecteurs $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_j$ on peut supposer que $\lambda_{1,1} \neq 0$

Pour $2 \leq j \leq p$ on pose $\vec{y}_j = \vec{x}_j - \frac{\lambda_{1,j}}{\lambda_{1,1}} \vec{x}_1 \in \text{Vect}(\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{n+1})$

Montrons que $(\vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p)$ est libre : $\forall (\mu_2, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{p-1}$,

$$\sum_{j=2}^p \mu_j \vec{y}_j = \vec{0} \Rightarrow \sum_{j=2}^p \mu_j \vec{x}_j - \sum_{j=2}^p \mu_j \frac{\lambda_{1,j}}{\lambda_{1,1}} \vec{x}_1 = \vec{0} \Rightarrow \sum_{j=2}^p \frac{\lambda_{1,j}}{\lambda_{1,1}} = 0 \text{ et } \mu_2 = \dots = \mu_p = 0$$

$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p)$ libre $\Rightarrow (\vec{y}_2, \dots, \vec{y}_p)$ est libre.

H.R. $\Rightarrow p-1 \leq n \Rightarrow p \leq n+1$

La proposition est vraie au rang $n+1$.

Par récurrence, la proposition est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n , $\mathcal{F} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille de n vecteurs de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est libre
2. $\mathcal{F}$ est génératrice
3. $\mathcal{F}$ est une base.

Preuve :

1. $\Rightarrow$ 2. : Par l'absurde : Si $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice : $\exists \vec{x} \in E$, $\vec{x} \notin \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$

Alors $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{x})$ libre de cardinal $n+1$ contredit $\dim(E) = n$

2. $\Rightarrow$ 3. : Montrons que $\mathcal{F}$ est libre, par l'absurde :

Si $\mathcal{F}$ est liée, l'un de ses vecteurs, par exemple $\vec{e}_n$, est combinaison linéaire des autres :

$\vec{e}_n \in \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ Donc $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ génératrice.

Alors, d'après le lemme, $n \leq n-1$ Impossible, donc $\mathcal{F}$ est libre, donc est une base.

3. $\Rightarrow$ 1. : Par définition.

2.3. Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E . Alors :

1. F est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie
2. $\dim(F) \leq \dim(E)$
3. $\dim(F) = \dim(E) \Rightarrow E = F$

Corollaire :

Dans un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors :

$$\begin{cases} F \subset G \\ \dim(F) = \dim(G) \end{cases} \Leftrightarrow F = G$$

Remarque :

Une famille génératrice de E n'est pas forcément génératrice de F , car ses vecteurs ne sont pas forcément dans F .

Preuve de la proposition :

1. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de F . $\mathcal{L}$ est aussi une famille libre de E donc $\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E)$
 Soit $\mathcal{B}$ une famille libre de F de cardinal maximal.
 $\mathcal{B}$ est génératrice de F : sinon $\exists \vec{x} \in F, \vec{x} \notin \text{Vect}(\mathcal{B})$
 Et $\mathcal{B} \cup \{\vec{x}\}$ est libre de cardinal $1 + \text{Card}(\mathcal{B}) > \text{Card}(\mathcal{B})$ contredit $\mathcal{B}$ de cardinal maximal donc $\mathcal{B}$ est une base.
 Donc F est un sous-espace vectoriel de dimension finie.
2. $\dim(F) = \text{Card}(\mathcal{B}) \leq \dim(E)$
3. $\begin{cases} \dim(F) = \dim(E) \Rightarrow \text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E) \Rightarrow \mathcal{B} \text{ est une base de } E. \\ \mathcal{B} \text{ est libre de } F \text{ donc de } E \end{cases}$
 E et F ont une même base donc $E = F$.

Proposition : Existence de supplémentaires :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Alors tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire (non unique).

Lemme :

Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E , alors $\text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p) \oplus \text{Vect}(\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n) = E$

Preuve du lemme :

Soient $F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $G = \text{Vect}(\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$

– Existence de la décomposition :

$$\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \vec{x} = \underbrace{\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_p \vec{e}_p}_{=\vec{y} \in F} + \underbrace{\lambda_{p+1} \vec{e}_{p+1} + \dots + \lambda_n \vec{e}_n}_{=\vec{z} \in G}$$

– Unicité de la décomposition :

Si $\vec{x} = \vec{y}' + \vec{z}'$ avec $\vec{y}' \in F$ et $\vec{z}' \in G$

$\exists \mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{K}, \exists \mu_{p+1}, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{y}' = \mu_1 \vec{e}_1 + \dots + \mu_p \vec{e}_p$ et $\vec{z}' = \mu_{p+1} \vec{e}_{p+1} + \dots + \mu_n \vec{e}_n$

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_p \vec{e}_p + \lambda_{p+1} \vec{e}_{p+1} + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$$

$$= \mu_1 \vec{e}_1 + \dots + \mu_p \vec{e}_p + \mu_{p+1} \vec{e}_{p+1} + \dots + \mu_n \vec{e}_n$$

Par unicité des coordonnées dans une base, $\forall i, \mu_i = \lambda_i$

Donc $E = F \oplus G$.

Preuve de la proposition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E , $p = \dim(F) \leq n = \dim(E)$

Théorème de la base incomplète $\Rightarrow F$ contient une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ qui est une famille libre de E .

On peut la compléter en une base $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$ de E .

On pose $G = \text{Vect}(\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$. Or, $F = \text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$

D'après le lemme, $F \oplus G = E$.

Proposition : Concaténation des bases :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.

Si $\begin{cases} (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p) \text{ est une base de } F \\ (\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n) \text{ est une base de } G \end{cases}$ alors $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E .

Preuve :

Libre : $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E \Rightarrow \underbrace{\lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_p \vec{e}_p}_{\in F} = - \underbrace{(\lambda_{p+1} \vec{e}_{p+1} + \dots + \lambda_n \vec{e}_n)}_{\in G}$$

Or $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ car $F \oplus G = E$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_p \vec{e}_p = \vec{0}_E \\ \lambda_{p+1} \vec{e}_{p+1} + \dots + \lambda_n \vec{e}_n = \vec{0}_E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 \quad ((\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p) \text{ est une base}) \\ \lambda_{p+1} = \dots = \lambda_n = 0 \quad ((\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_n) \text{ est une base}) \end{cases} \quad \text{Donc } \mathcal{B} \text{ est libre.}$$

Génératrice : $E = F \oplus G$ donc $\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

$\exists ! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $\vec{y} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_p \vec{e}_p$

$\exists ! (\lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tel que $\vec{z} = \lambda_{p+1} \vec{e}_{p+1} + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$

Donc $\vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i$ Donc $\mathcal{B}$ est génératrice.

Donc $\mathcal{B}$ est une base.

Corollaire :

Si $E = F \oplus G$, alors $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Il suffit de compter le nombre de vecteurs dans les bases.

2.4. Quelques formules de dimension

Formule de Grassmann :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, F et G deux sous espaces vectoriels de E .
 $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Proposition :

$$^{(1)} E = F \oplus G \Leftrightarrow ^{(2)} \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{\vec{0}\} \end{cases} \Leftrightarrow ^{(3)} \begin{cases} E = F + G \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases} \Leftrightarrow ^{(4)} \begin{cases} F \cap G = \{\vec{0}\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$

Preuve :

1. $\Leftrightarrow$ 2. : Déjà vu.

1. $\Rightarrow$ 3. : Évident.

1. $\Rightarrow$ 4. : Évident.

3. $\Rightarrow$ 2. : Il suffit de montrer que $F \cap G = \{\vec{0}\}$:

$$\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 0$$

4. $\Rightarrow$ 2. : Il suffit de montrer que $E = F + G$:

$$F + G \subset E \text{ donc } \dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

Donc $F + G = E$.

Preuve de la formule :

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F et de G et de E , donc contient une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$ que l'on peut compléter en $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ une base de F , et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$ une base de G .

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$

– $\mathcal{B}$ génératrice :

$\forall \vec{x} \in F + G, \exists (\vec{y}, \vec{z}) \in F \times G$ tel que $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_r, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{r+p}$ tel que $\vec{y} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_r \vec{e}_r + \mu_1 \vec{f}_1 + \dots + \mu_p \vec{f}_p$

$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{K}^{r+q}$ tel que $\vec{z} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_r \vec{e}_r + \beta_1 \vec{g}_1 + \dots + \beta_q \vec{g}_q$

Alors $\vec{x} = (\lambda_1 + \alpha_1) \vec{e}_1 + \dots + (\lambda_r + \alpha_r) \vec{e}_r + \mu_1 \vec{f}_1 + \dots + \mu_p \vec{f}_p + \beta_1 \vec{g}_1 + \dots + \beta_q \vec{g}_q$, Donc $\mathcal{B}$ est génératrice.

– $\mathcal{B}$ libre :

$$\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_p, \gamma_1, \dots, \gamma_q) \in \mathbb{K}^{r+p+q},$$

$$\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_r \vec{e}_r + \beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_p \vec{f}_p + \gamma_1 \vec{g}_1 + \dots + \gamma_q \vec{g}_q = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_r \vec{e}_r + \beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_p \vec{f}_p}_{\in F} = - \underbrace{(\gamma_1 \vec{g}_1 + \dots + \gamma_q \vec{g}_q)}_{\in G}$$

$$\Rightarrow \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r \text{ tel que } \alpha_1 \vec{e}_1 + \dots + \alpha_r \vec{e}_r + \beta_1 \vec{f}_1 + \dots + \beta_p \vec{f}_p = -\gamma_1 \vec{g}_1 - \dots - \gamma_q \vec{g}_q = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_r \vec{e}_r$$

Par unicité des coordonnées dans la base de F et dans la base de G : $\alpha_i = \lambda_i$, $\beta_j = 0$, $\lambda_i = 0$, $\gamma_k = 0$

Donc $\alpha_i = 0$ donc $\mathcal{B}$ est libre.

Donc $\mathcal{B}$ est une base de $F+G$ et $\dim(F+G) = \text{Card}(\mathcal{B}) = r+q+p = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$

Proposition :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

1. $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$
2. $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$

Preuve (1.) :

Soient $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ une base de F . Soit $\mathcal{B} = ((\vec{e}_1, \vec{0}_F), \dots, (\vec{e}_n, \vec{0}_F), (\vec{0}_E, \vec{f}_1), \dots, (\vec{0}_E, \vec{f}_p))$

$\text{Card}(\mathcal{B}) = n+p$.

– $\mathcal{B}$ génératrice :

$$\forall \vec{x} \in E \times F, \exists \vec{y} \in E, \exists \vec{z} \in F \text{ tels que } \vec{x} = (\vec{y}, \vec{z})$$

$$\exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } \vec{y} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i \quad \exists! (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p \text{ tel que } \vec{z} = \sum_{j=1}^p \mu_j \vec{f}_j$$

$$\vec{x} = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^p \mu_j \vec{f}_j \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (\vec{e}_i, \vec{0}_F) + \sum_{j=1}^p \mu_j (\vec{0}_E, \vec{f}_j)$$

– $\mathcal{B}$ libre :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \forall (\mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (\vec{e}_i, \vec{0}_F) + \sum_{j=1}^p \mu_j (\vec{0}_E, \vec{f}_j) = \vec{0}_{E \times F} = (\vec{0}_E, \vec{0}_F) \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i, \sum_{j=1}^p \mu_j \vec{f}_j \right) = (\vec{0}_E, \vec{0}_F) \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E \text{ et } \sum_{j=1}^p \mu_j \vec{f}_j = \vec{0}_F$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \text{ et } \mu_1 = \dots = \mu_p = 0$$

car $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est libre car $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_p)$ est libre

Donc $\mathcal{B}$ est une base, donc $\dim(E \times F) = \text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E) + \dim(F)$

2.5. Espaces vectoriels isomorphes

Définition :

Deux $\mathbb{K}$ -ev sont dits isomorphes s'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme.

Proposition :

Tout $\mathbb{K}$ -ev de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Preuve :

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\rightarrow E \\ \varphi : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) &\mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{e}_i \end{aligned}$$

φ est linéaire et φ est bijective car $\mathcal{B}$ est une base. Donc φ est un isomorphisme.

Proposition :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

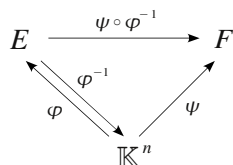
E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Preuve :

$\Rightarrow$: Soit φ un isomorphisme entre E et F . φ transforme une base de E en une base de F .

Donc $\dim(E) = \dim(F)$

$\Leftarrow$: $\dim(E) = \dim(F) = n$



φ et ψ sont des isomorphismes donc $\psi \circ \varphi^{-1}$ est un isomorphisme.

Donc E et F sont isomorphes.

3. Applications linéaires en dimension finie

3.1. Théorème du rang

Définition :

On appelle rang d'une famille $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ de n vecteurs de E la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$.

On appelle rang d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et on note $\text{rg}(u)$ la dimension de l'image de u .

$\text{rg}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \dim(\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n))$

$\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$.

Remarque :

Les deux définitions sont liées :

Si $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E , et $u \in \mathcal{L}(E, F)$:

$\text{Im}(u) = \text{Vect}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$ et $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$.

Théorème du rang :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, F un $\mathbb{K}$ -ev, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Tout supplémentaire du noyau de u est isomorphe à $\text{Im}(u)$.

$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u)$.

Preuve :

Soit S un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$: $S \oplus \text{Ker}(u) = E$

Soit $v : \begin{array}{l} S \rightarrow \text{Im}(u) \\ \vec{x} \mapsto u(\vec{x}) \end{array}$

v est linéaire car c'est la restriction d'une application linéaire.

$\forall \vec{x} \in S, v(\vec{x}) = \vec{0}_F \Rightarrow u(\vec{x}) = \vec{0}_F \Rightarrow \vec{x} \in \text{Ker}(u)$

Or $\vec{x} \in S$ et $S \cap \text{Ker}(u) = \{\vec{0}_E\} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}_E$ Donc v injective.

$\forall \vec{y} \in \text{Im}(u), \exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$

Or $S \oplus \text{Ker}(u) = E$ donc $\exists! (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in S \times \text{Ker}(u)$ tel que $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$

$\vec{y} = u(\vec{x}) = u(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = u(\vec{x}_1) + u(\vec{x}_2) = v(\vec{x}_1) + \vec{0}$ Donc v surjective.

Donc v est un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$.

D'où $\dim(S) = \dim(\text{Im}(u))$ d'où $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$.

Remarques :

Si E et F sont de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$

$\text{rg}(u) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$

Si $\text{rg}(u) = \dim(E)$ alors u est injective

Si $\text{rg}(u) = \dim(F)$ alors u est surjective

$\text{Im}(u) \subset F \Rightarrow \dim(\text{Im}(u)) \leq \dim(F)$

$\text{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u)) \leq \dim(E)$

3.2. Caractérisation des isomorphismes en dimension finie

Théorème :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de même dimension, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. u est bijective
2. u est injective
3. u est surjective
4. u est inversible à gauche : $\exists v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $v \circ u = \text{id}_E$
5. u est inversible à droite : $\exists v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $u \circ v = \text{id}_F$.

Preuve :

Il est évident que 1. $\Rightarrow$ 2. 1. $\Rightarrow$ 3. 1. $\Rightarrow$ 4. 1. $\Rightarrow$ 5.

2. $\Rightarrow$ 1. : u injective $\Rightarrow \text{Ker}(u) = \{0\}$

Théorème du rang : $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$

Donc $\text{rg}(u) = \dim(E) = \dim(F)$

Or $\text{Im}(u) \subset F$ Donc $\text{Im}(u) = F$ Donc u est surjective donc bijective.

3. $\Rightarrow$ 1. : u surjective $\Rightarrow \text{Im}(u) = F \Rightarrow \text{rg}(u) = \dim(F) = \dim(E)$

Théorème du rang : $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$

D'où $\dim(\text{Ker}(u)) = 0 \Rightarrow \text{Ker}(u) = \{0\}$ Donc u est injective donc bijective.

4. $\Rightarrow$ 2. : $v \circ u = \text{id}_E$ injective $\Rightarrow u$ injective.

5. $\Rightarrow$ 3. : $u \circ v = \text{id}_F$ surjective $\Rightarrow u$ surjective.

Corollaire :

Si E est de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$,

u injective $\Leftrightarrow u$ surjective $\Leftrightarrow u$ bijective.

Remarque :

Le résultat est faux si E n'est pas de dimension finie.

Proposition : Invariance du rang par composition par des isomorphismes :

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$

1. Si $v \in \mathcal{L}(F, G)$ est un isomorphisme, alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$
2. Si $w \in \mathcal{L}(G, E)$ est un isomorphisme, alors $\text{rg}(u \circ w) = \text{rg}(u)$.

Preuve :

1. $u : E \rightarrow F$ $v \circ u : E \rightarrow G$

$\forall \vec{x} \in E, \vec{x} \in \text{Ker}(v \circ u) \Leftrightarrow v \circ u(\vec{x}) = \vec{0}_G \xrightarrow{v \text{ bijective}} u(\vec{x}) = v^{-1}(\vec{0}_G) = \vec{0}_F \Leftrightarrow \vec{x} \in \text{Ker}(u)$

Donc $\text{Ker}(v \circ u) = \text{Ker}(u)$

Théorème du rang : $\dim(E) = \text{rg}(v \circ u) + \dim(\text{Ker}(v \circ u)) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$

D'où $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$

2. $u \circ w : G \rightarrow F$ $u : E \rightarrow F$

– $\text{Im}(u \circ w) \subset \text{Im}(u)$ en effet $\forall \vec{y} \in \text{Im}(u \circ w), \exists \vec{x} \in G$ tel que $\vec{y} = u \circ w(\vec{x}) \in \text{Im}(u)$

– $\forall \vec{y} \in \text{Im}(u), \exists \vec{x} \in E$ tel que $\vec{y} = u(\vec{x})$

Or w réalise une bijection de G sur E donc $\exists ! \vec{t} \in G$ tel que $\vec{x} = w(\vec{t})$, d'où $\vec{y} = u(w(\vec{t}))$

Donc $\vec{y} \in \text{Im}(u \circ w)$ donc $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(u \circ w)$

Donc $\text{Im}(u \circ w) = \text{Im}(u)$ donc $\text{rg}(u \circ w) = \text{rg}(u)$.

4. Hyperplans et formes linéaires

Définition :

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n .

On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n , H un sous-espace vectoriel de E .

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. H est un hyperplan de E
2. $\forall \vec{a} \notin H, H \oplus \text{Vect}(\vec{a}) = E$
3. $\exists \vec{a} \in E \setminus H$ tel que $H \oplus \text{Vect}(\vec{a}) = E$
4. $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \varphi \neq \vec{x} \mapsto 0$, tel que $H = \text{Ker}(\varphi)$.

Preuve :

$$1. \Rightarrow 2. : -\dim(H) + \dim(\text{Vect}(\vec{a})) = \dim(E)$$

$$\Leftrightarrow n-1 + 1 = n \rightarrow \text{Vrai car } \vec{a} \notin H \text{ d'où } \vec{a} \neq \vec{0}$$

$$- \forall \vec{x} \in H \cap \text{Vect}(\vec{a}), \exists \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } \vec{x} = \lambda \vec{a}$$

$$\text{Si } \lambda \neq 0, \vec{a} = \frac{1}{\lambda} \vec{x} \in H \text{ contredit } \vec{a} \notin H \text{ donc } \lambda = 0 \text{ et } \vec{x} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } H \oplus \text{Vect}(\vec{a}) = E$$

$$2. \Rightarrow 3. : \text{Évident.}$$

$$3. \Rightarrow 4. : \text{Construction de } \varphi :$$

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1})$ une base de H . Par concaténation $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{a})$ est alors une base de E .

On définit une forme linéaire φ par :

$$\varphi(\vec{e}_i) = 0 \text{ et } \varphi(\vec{a}) = 1 \neq 0 \quad \varphi \text{ est une forme linéaire non nulle.}$$

$$\text{Soit } \vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_{n-1} \vec{e}_{n-1} + \lambda \vec{a} \in E$$

$$\vec{x} \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \lambda_1 \varphi(\vec{e}_1) + \dots + \lambda_{n-1} \varphi(\vec{e}_{n-1}) + \lambda \varphi(\vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \in H$$

$$4. \Rightarrow 1. : \text{Théorème du rang : } \dim(E) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) + \text{rg}(\varphi)$$

$$\text{Im}(\varphi) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{K}$$

$$\text{Donc } \text{Im}(\varphi) = \{0\} \text{ ou } \text{Im}(\varphi) = \mathbb{K} \quad \text{Or } \varphi \neq \vec{x} \mapsto 0 \quad \text{Donc } \text{Im}(\varphi) = \mathbb{K} \text{ et } \text{rg}(\varphi) = 1$$

$$\text{Donc } \dim(H) = \dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \text{rg}(\varphi) = n - 1.$$

Proposition :

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, φ, ψ deux formes linéaires non nulles.

$$\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi) \Leftrightarrow \varphi \text{ et } \psi \text{ sont proportionnelles.}$$

Preuve :

$$\Leftarrow : \exists \alpha \in \mathbb{K}^* \text{ tel que } \varphi = \alpha \psi$$

$$\vec{x} \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \varphi(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \alpha \psi(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \psi(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \in \text{Ker}(\psi)$$

$$\Rightarrow : \text{Soit } H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi). \quad H \text{ est un hyperplan.}$$

$$\forall \vec{a} \in E \setminus H, E = H \oplus \text{Vect}(\vec{a})$$

$$\text{Soit } (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}, \vec{a}) \text{ une base de } E \text{ avec } (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{n-1}) \text{ une base de } H.$$

$$\varphi(\vec{a}), \psi(\vec{a}) \in \mathbb{K}^*$$

$$\text{Posons } \alpha = \frac{\varphi(\vec{a})}{\psi(\vec{a})}. \text{ On a alors } \forall i, \varphi(\vec{e}_i) = 0 = \alpha \times 0 = \alpha \psi(\vec{e}_i) \text{ et } \varphi(\vec{a}) = \frac{\varphi(\vec{a})}{\psi(\vec{a})} \psi(\vec{a}) = \alpha \psi(\vec{a})$$

$$\text{Donc } \varphi = \alpha \psi \text{ sur une base de } E. \text{ Donc } \varphi = \alpha \psi.$$

* * * * *